ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES DE STRASBOURG

1976

Option "Physique-Mathématiques"

MATHEMATIQUES I (3 h)

I

Soit l'intégrale définie $I_n = (n+1)(n+2)\int_0^1 x^n \sin \pi x \, dx$ (n étant un entier naturel).

1° Établir une formule permettant de calculer I_{n+2} en fonction de I_n.

2° Calculer I_0, I_1, I_2.

3° Démontrer que, quel que soit n, $0 < I_n < \pi$.

4° Exprimer $\pi - I_n$ en fonction de I_{n+2} et n. En déduire la limite de I_n si $n \to +\infty$.

5° On se propose d'obtenir, en prenant $\frac{1}{n}$ comme variable, un développement limité d'ordre 4 de I_n lorsque $n \to +\infty$. On peut pour cela exploiter les résultats de 4° en opérant par étapes :

Première étape : Déterminer trois réels A, B, C tels que

$$I_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}$$

Deuxième étape : Déterminer C et D tels que

$$I_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + \frac{E}{n^4} + \frac{\varphi}{n^4}$$

ε et φ étant deux fonctions de n qui tendent vers zéro si $n \to +\infty$.

II

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère cartésien orthonormé (Ox, Oy) on considère le cercle de centre O et de rayon R, puis sur ce cercle les deux points P et Q tels que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP}) = t$, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OQ}) = nt$ (n est un entier relatif différent de -1, 0, 1, et t un paramètre variable réel).

Ces points étant affectés respectivement des coefficients réels λ et μ liés par la relation $\lambda + \mu = 1$ on appelle M leur barycentre.

1° Montrer qu'on peut déterminer λ et μ en fonction de n de manière que la courbe Γ_n décrite par M lorsque t varie admette en M, quel que soit t, la droite PQ pour tangente. Désormais λ et μ garderont les valeurs ainsi déterminées.

2° Démontrer que Γ_n est globalement invariante dans la symétrie orthogonale d'axe $x'Ox$ ainsi que dans la rotation $\mathcal{R}\left(0, \frac{2\pi}{n-1}\right)$. En déduire une méthode pour l'étude et la construction de Γ_n.

3° Construire Γ_5 et Γ_{-4} ($n = 5$, $n = -4$).

4° Indiquer par des croquis comment se modifie Γ_n lorsque n prend les valeurs 2, 3, 4, ..., etc., puis -2, -3, -4, ..., etc.

5° Le tracé précédent met en évidence une portion de plan comprise entre Γ_n et le cercle. Évaluer son aire arithmétique en prenant comme unité l'aire du cercle.

6° Calculer la longueur arithmétique de Γ_n et la comparer à la longueur du cercle. Chercher sa limite si $n \to \pm\infty$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail